Flächenberechnungen im $\mathbb{R}^3$
Übung

1. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche im Parallelogramm, das von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und festgelegt wird.

2. Die Punkte $A(5; -2: 3)$, $B(5; 0; 2)$, $C(6; -2; 4)$ und $D(6; -4; 5)$ legen im $\mathbb{R}^3$ das Viereck ABCD fest. Zeigen Sie, dass es sich bei diesem Viereck um ein Parallelogramm handelt und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

3. Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit $A(-2; 2{,}4)$, $B(3; -1; 0)$ und $C(1; 1; 4)$.

4. Zeigen Sie: Das Dreieck ABC_k mit $A(1; 5: 7)$, $B(4; -4; 1)$ und $C_k\big(-(3+k); 2+3k; 2(1+k)\big)$ besitzt einen von $k \in \mathbb{R}$ unabhängigen Flächeninhalt. Interpretieren Sie diese Tatsache in Bezug auf die gegenseitige Lage der Punkte A, B und C_k.

Flächenberechnungen im $\mathbb{R}^3$
Lösung

1. $A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2 + 10^2 + (-10)^2} = \sqrt{225} = 15$ FE.

2. Für den Beweis des Parallelogramms genügt es zu zeigen, dass $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, dies gilt wegen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   Zur Berechnung des Flächeninhalts müssen zwei Verbindungsvektoren zwischen den Punkten verwendet werden, z.B. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$.
   Der Flächeninhalt beträgt $A_{\text{Parallelogramm}} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$ FE.

3. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
   $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{44} \approx 6{,}63$ FE.

4. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC_k} = \begin{pmatrix} -4-k \\ -3+3k \\ -5+2k \end{pmatrix}$
   $A_{\text{Dreieck}} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC_k}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -9(-5+2k) + 6(-3+3k) \\ -6(-4-k) - 3(-5+2k) \\ 3(-3+3k) + 9(-4-k) \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 27 \\ 39 \\ -45 \end{pmatrix}\right|$
   $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4275} \approx 32{,}69$ FE.
   Die Punkte C_k liegen alle auf einer Geraden, die parallel ist zu $\overrightarrow{AB}$.